MATEMATICA - LEZIONE 2

mercoledì 1 ottobre 2025 09:03

Insiemi numerici

1) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots\}$ NUMERI NATURALI

2) $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\ldots\}$ NUMERI INTERI

3) $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$ NUMERI RAZIONALI

- In $\mathbb{N}$ si possono svolgere addizioni e moltiplicazioni ma non sottrazioni.
- In $\mathbb{Z}$: addizioni, moltiplicazioni, sottrazioni ma non divisioni.

Def: Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ si dice che a è MULTIPLO (INTERO) di b se $\exists\, q \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = b \cdot q$.
Si dirà anche che b è un DIVISORE di a.

TEOREMA

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, allora $\exists!\, q, r \in \mathbb{Z}$ tali che :

1) $a = bq + r$
2) $0 \leq r < |b|$

$$|b| = \begin{cases} b & \text{se } b \geq 0 \\ -b & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

ESEMPI

10 è multiplo di 5 $\quad (10 = 5 \cdot \underset{q}{2} + \underset{r}{0})$

$11 = 5 \cdot \underbrace{2}_{q} + \underbrace{1}_{r}$

Def Sia $a \in \mathbb{Z}$. Si dice che a è PARI se a è multiplo di 2, altrimenti si dice che a è DISPARI

OSS Sia $a \in \mathbb{Z}$

1) a è pari $\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = 2q$
2) a è dispari $\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = 2q + 1$.
3) a è pari $\Leftrightarrow a^2$ è pari $\Leftrightarrow a^2$ è multiplo di 4
4) a è dispari $\Leftrightarrow a^2$ è dispari.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

OSS Se m è un multiplo di b e di d, allora

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\frac{m}{b} + c\frac{m}{d}}{m} \qquad \left(\frac{a\frac{\cancel{m}}{b}}{m} + \frac{c\frac{\cancel{m}}{d}}{\cancel{m}} \right)$$

Def: Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \neq 0$. Si definisce MINIMO COMUNE MULTIPLO tra a e b il più piccolo numero naturale che è multiplo sia di a che di b. (si indica con $m.c.m(a, b)$)

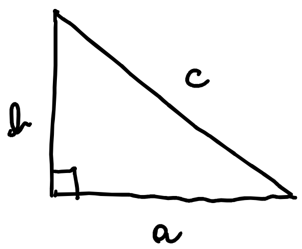
$$\frac{1}{10} + \frac{2}{15} = \frac{3 + 4}{30} = \frac{7}{30}$$

Def Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \neq 0$. Si definisce MASSIMO COMUN DIVISORE tra a e b il più grande numero naturale che è un divisore sia di a che di b. (si indica con $MCD(a, b)$)

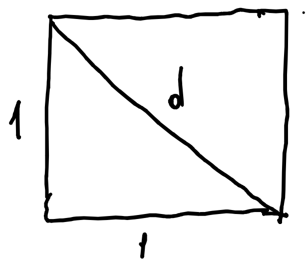
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

Con i numeri razionali: si possono svolgere addizioni, moltiplicazioni, sottrazioni, divisioni.
Ma non sempre si possono calcolare le radici ~~radici~~ quadrate.

La necessità di introdurre i numeri reali è nata con il Teorema di Pitagora



$$\boxed{\text{Teorema di Pitagora: } a^2 + b^2 = c^2}$$



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

TEOREMA $\nexists\, x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$.

DIM

Supponiamo per assurdo che $\exists\, x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$

Siccome $x \in \mathbb{Q}$ allora $x = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

con $MCD(a, b) = 1$ (a meno di semplificare i fattori comuni)

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

$$\Rightarrow a^2 \text{ è pari}$$

$\Rightarrow a$ è pari.

$\Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = 2q$.

Ma $a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2q)^2 = 2b^2$

$\Rightarrow 4q^2 = 2b^2$

$\Rightarrow 2q^2 = b^2$

$\Rightarrow b$ è pari

a e b sono entrambi pari $\Rightarrow MCD(a, b) \geq 2$

È impossibile perché $MCD(a, b) = 1$.

Ogni numero razionale si può rappresentare con una scrittura decimale.

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{1}{5} = 0,2$$

$$\frac{1}{3} = 0,33333\ldots\ldots = 0,\overline{3}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & 3 \\ \hline
0 & 0,333333\ldots \\ \hline
10 & \\
9 & \\ \hline
10 & \\
9 & \\ \hline
1 &
\end{array}$$

$$\frac{113}{50}$$

$$\begin{array}{r|l}
113 & 50 \\ \hline
100 & 2,26 \\ \hline
130 & \\
100 & \\ \hline
300 & \\
300 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$\frac{113}{50} = 2,26$$

$\frac{2}{15}$

$$\begin{array}{l|l} 2 & 15 \\ \hline 0 & 0,13333\ldots \\ 20 & \\ 15 & \\ \hline 50 & \\ 45 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$\frac{2}{15} = 0,1\overline{3}$

$2,17\overline{54}$

OSS Ogni numero razionale ha una scrittura decimale che può essere solo finita o periodica (cioè una o più cifre che si ripetono infinite volte).

$0,010110111011110\ldots$

non può essere un numero razionale.

ESEMPI DI NUMERI IRRAZIONALI

$\sqrt{2} = 1,4142\ldots$

$\pi = 3,14\ldots$

$e = 2,71\ldots$

NUMERI REALI

$\mathbb{R} = \{ m, a_1 a_2 a_3 \ldots \mid m \in \mathbb{Z} \text{ e } a_1, a_2 \ldots \in \{0,1,2,\ldots,9\}\}$

OSS

1) $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

2) $\mathbb{R} = \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{NUMERI RAZIONALI}} \cup \underbrace{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}_{\text{NUMERI IRRAZIONALI}}$

PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI IN $\mathbb{R}$:

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a + b = b + a$ (PROP. COMMUTATIVA DI +)

2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a + (b+c) = (a+b) + c$
$(= a + b + c)$ (PROP. ASSOCIATIVA)

3) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a + 0 = 0 + a = a$
(0 è l'unico numero reale con questa proprietà)

4) $\forall a \in \mathbb{R}$, $-a$ è l'unico numero reale t.c.
$a + (-a) = 0$

5) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \cdot b = b \cdot a$ (PROP. COMMUTATIVA DI $\cdot$)

6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
$(= a \cdot b \cdot c = abc)$ (PROP. ASSOCIATIVA DI $\cdot$)

7) 1 è l'unico numero reale t.c.
$\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$

8) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\frac{1}{a}$ è l'unico numero reale
t.c. $a \cdot \frac{1}{a} = 1.$

9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a(b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
(PROP. DISTRIBUTIVA) $(= ab + ac)$

Conseguenze di 1) - 9):

1) Leggi di cancellazione:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a + c = b + c \iff a = b$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a + c = b \iff a = b - c$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0: \quad ac = bc \iff a = b$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 : \quad a c = b \iff a = \frac{b}{c}$

2) Prodotto per zero:

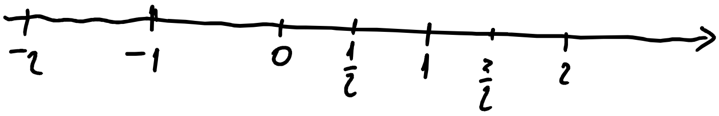
$\forall a \in \mathbb{R} : \quad a \cdot 0 = 0.$

3) Legge di annullamento del prodotto:

$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0.$

Ordinamento dei numeri reali

I numeri reali si possono rappresentare su una retta



$a < b$ significa che b sta alla destra di a sulla retta reale

$a > b$ a sta alla destra di b.

$a \geq b$ significa: $a > b \vee a = b$

$a \leq b$ significa: $a < b \vee a = b$

PROPRIETÀ

1) $\forall a \in \mathbb{R} : \quad a \leq a$ (RIFLESSIVA)

2) $\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a \leq b \wedge b \leq a \iff a = b$ (ANTISIMMETRICA)

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \quad a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (TRANSITIVA)

4) $\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a \leq b \vee b \geq a$ (PROP. TOTALE)

(più precisamente: $a < b \vee a = b \vee a > b$)

5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$a \leq b \iff a+c \leq b+c$
$a \geq b \iff a+c \geq b+c$
$a > b \iff a+c > b+c$
$a < b \iff a+c < a+c$

(COMPATIBILITÀ DI + CON LE DISUGUAGLIANZE)

6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$:

$a \leq b \iff ac \leq bc$
$a \geq b \iff ac \geq bc$
$a < b \iff ac < bc$
$a > b \iff ac > bc$

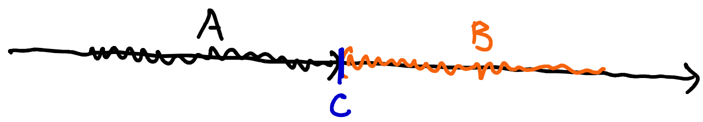
(COMPATIBILITÀ DI $\cdot$ CON LE DISUGUAGLIANZE)

7) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c < 0$:

$a \leq b \iff ac \geq bc$
$a \geq b \iff ac \leq bc$
$a > b \iff ac < bc$
$a < b \iff ac > bc$

Completezza di $\mathbb{R}$ (proprietà di Dedekind)

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti e tali che $\forall a \in A, b \in B$: $a \leq b$. Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall a \in A, b \in B$: $a \leq c \leq b$.



Queste proprietà si usano per risolvere equazioni e disequazioni:

Def: Se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(n \text{ volte})}$

Inoltre se $x \neq 0$, definiamo $x^0 = 1$

(0^0 non è definito).

OSS

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

$$\left((2^{10})^2 = 2^{20} \right)$$

Def Un POLINOMIO a coefficienti reali di variabile x è un'espressione del tipo

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Se $a_n \neq 0$, si dice che il GRADO del polinomio è n. (il grado di $p(x)$ si indica con $\deg p$)

ESEMPI

$x^2 + x - 2$ (grado 2)

$x^3 - 7x$ (grado 3)

$\pi x^{11} - \sqrt{3}\, x^2$ (grado 11)

Vogliamo risolvere equazioni / disequazioni polinomiali cioè che si possono ricondurre a un'equazione del tipo $p(x) = 0$.

Le soluzioni di un'equazione $p(x) = 0$ con p polinomio si dicono RADICI DI p o ZERI di p.

Polinomi di grado 1: $p(x) = ax + b$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- Equazioni:

$$ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a}$$

L'unica soluzione è $x = -\frac{b}{a}$

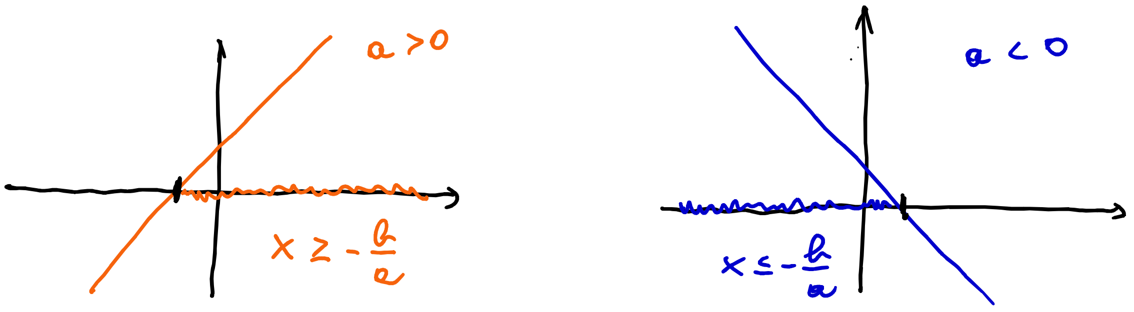
- Disequazioni

$$ax + b \geq 0 \iff ax \geq -b$$

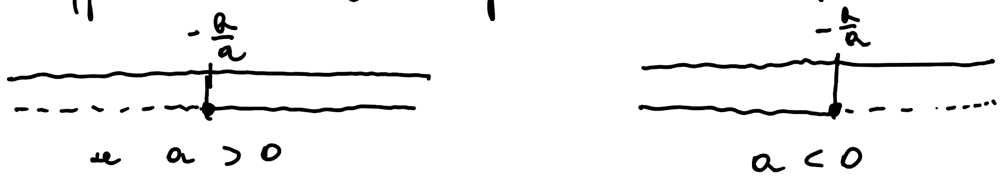
Se $a > 0$: $x \geq -\frac{b}{a}$

Se $a < 0$: $x \leq -\frac{b}{a}$

Interpretazione grafica: $y = ax + b$ rappresenta una retta sul piano cartesiano la cui inclinazione dipende da a:



Rappresentazione del segno di $ax + b$:



- Polinomi di secondo grado

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

TEOREMA Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$. Allora:

1) Se $\Delta > 0$, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

2) Se $\Delta = 0$, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha come unica soluzione $x = -\frac{b}{2a}$

3) Se $\Delta < 0$, $\nexists$ soluzioni reali di $ax^2 + bx + c = 0$

DIM

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad (*)$$

$(*)$ $$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} =$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= ax^2 + bx + \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a}} = ax^2 + bx + c.$$

Vogliamo risolvere $ax^2 + bx + c = 0$, cioè:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

- Se $\Delta < 0$

$$\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{< 0} \quad \text{impossibile.}$$

- Sia $\Delta = 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff x + \frac{b}{2a} = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$$

- Se $\Delta > 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

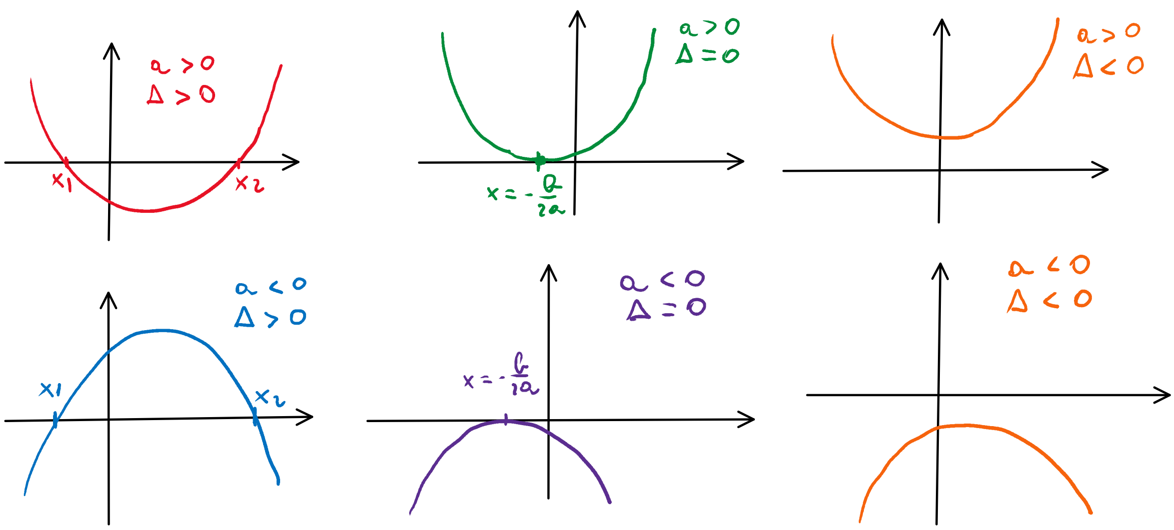
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

cioè $x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

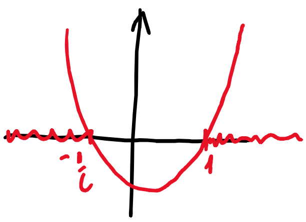
Per le disequazioni l'idea è che un'equazione $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola la cui concavità dipende da a.
Il segno di Δ dice quante volte la parabola interseca l'asse x.



$$2x^2 - x - 1 \geq 0$$

Trovo le radici: $\Delta = 1 + 8 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Soluzioni: $x \leq -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x \geq 1.$